《线性代数》试卷

目 录

东莞理工学院（本科）试卷（ A 卷 ）

2014-2015 学年第 1 学期

《线性代数》

开课单位： 计算机学院 ，考试形式：闭卷

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										
评卷人										

1、判别正误题 （对者打“ √ ”，错者打“ × ",共 10 分， 每题 2 分）

得分	

（1）、行列式是一个数表，矩阵是一个数值。 （ ）

（2）、在矩阵乘积运算 AB=C 中，A 的列数须等于 B 的行数。 （ ）

（3）、设 $\lambda 1$，$\lambda 2$ 是矩阵 A 的两个不同的特征值，则对应 $\lambda 1$，$\lambda 2$ 的两个特征向量有可能线性相关。 （ ）

（4）、二次型 $f(x,y,z)=2x^2+3y^2-6xz+4yz$ 的矩阵是 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ （ ）

（5）、η_1，η_2 是非齐次线性方程组 AX=b 的两个解向量，则 $\eta 1-\eta 2$ 也是 AX=b 的解向量。 （ ）

2、计算行列式 $\mathbf{D}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ （10 分）

3、利用初等行变换求下面矩阵的逆矩阵 （10 分）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4、设 $b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_4$，$b_4=a_4+a_5$，$b_5=a_5+a_6$，$b_6=a_6+a_1$，证明向量组 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 线性相关。 （10 分）

5、设向量组 A: $\alpha_1=\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$，及 B: $\beta_1=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$， $\beta_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$，证明向量组 A 与 B 等价 （10 分）

.

6、 设λ_1和λ_2是方阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为p_1和p_2，证明p_1+p_2不是A的特征向量。（10分 ）

7、求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases} \qquad (*)$$

通过求一个特解和对应齐次线性方程组的基础解系，得出方程组（*）的通解。（15分）

8、求一个正交变换化二次型 $f = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ 为规范形。 （15分）

9、 已知 A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 X 满足 A^*X= A^{-1}+2X, ， 求矩阵 X. （10分 ）

东莞理工学院（本科）试卷（ B 卷 ）

2014-2015 学年第 1 学期

《线性代数》

开课单位： 计算机学院 ，考试形式：闭卷

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										
评卷人										

1、判别正误题 （对者打“√”，错者打“×",共 10 分， 每题 2 分）

得分	

（1）、在矩阵乘积运算 AB=C 中，C 的行数等于 A 的行数，列数等于 B 的列数。（　　）

（2）、行列式是一个数值，矩阵是一个数表。（　　）

（3）、设$\lambda 1$，$\lambda 2$是矩阵 A 的两个不同的特征值，则对应$\lambda 1$，$\lambda 2$的两个特征向量线性无关。（　　）

（4）、二次型 $f(x,y,z)=2x^2+3y^2-6xy+4yz$ 的矩阵是 $A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$（　　）

（5）、η_1，η_2是非齐次线性方程组 AX=b 的两个解向量，则$\eta 1-\eta 2$是对应齐次线性方程组 AX=0 的解向量。（　　）

2、计算行列式 $\mathbf{D}=\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ （10 分）

3、利用初等行变换求下面矩阵的逆矩阵　（10 分）

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

4、设 $b_1=a_1+a_2$, $b_2=a_2+a_3$, $b_3=a_3+a_4$, $b_4=a_4+a_5$, $b_5=a_5+a_6$, $b_6=a_6+a_1$, 证明向量组 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 线性相关。（10 分）

5、设向量组 A: $\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\-4\end{bmatrix}$, 及 B: $\beta_1=\begin{bmatrix}8\\-4\\1\\1\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\7\end{bmatrix}$，证明向量组 A 与 B 等价。（10 分）

.

6、 设λ_1和λ_2是对称矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为p_1和p_2，证明p_1与p_2正交。 （10分 ）

7、求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (*)$$

通过求一个特解和对应齐次线性方程组的基础解系，得出方程组（*）的通解。 （15分）

8、求一个正交变换化二次型 $f = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ 为标准形。（15分）

9、设矩阵 X 满足 A^*X= A^{-1}B+2X，其中 A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$， B=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$， 求矩阵 X.（10分 ）

东莞理工学院（本科）试卷（A 卷）答案及评分标准

2011 --2012 学年第 一 学期

《 线性代数 》试卷

开课单位：计算机学院数学教研室，考试形式：闭卷，允许带___入场

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、选择填空题（共 80 分,每小题 2 分）

得分	

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=$ ___B___ ；

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$|-2A|=$ ___D___ ；

(A) 2 (B) -2 (C) 8 (D) -8

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{pmatrix}$,则 $A\cdot B=$ ___A___;

(A) $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$

4. 设 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{pmatrix}$,则 $BB^T=$ ___B___;

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5.设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______C______;

(A) $\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & -2 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

6.行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}=$___D___;

(A) 0 (B) 1 (C) 18 (D) -18

7. $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}$的第 2 行第 1 列元素 2 的代数余子式 $A_{21}=$___B___;

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

8.在第 6 小题中,表达式：$2\cdot A_{11}+3\cdot A_{12}+A_{13}=$___A___;

(A) 0 (B) -3 (C) 18 (D) -18

9.在第 6 小题中,表达式：$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=$___D___;

(A) 0 (B) -3 (C) 18 (D) -18

10. 在第 6 小题中,表达式：$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$___B___;

(A) 0 (B) -3 (C) 18 (D) -18

11. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A 的秩 $R(A)=$___C___;

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\4 & 4 & 0 & 0\\3 & 0 & 3 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则 $\det(B)=$___D___;

(A) -6 (B) -12 (C) -24 (D) -48

13.在第 12 小题中,秩$R(B)=$ D ;

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

14. 向量$\alpha=(1,2,3)^T,\beta=(1,1,1)^T$, 则矩阵$A=\alpha\cdot\beta^T=$ A ;

(A) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ (C) 6 (D) -6

15. 向量$\alpha=(1,2,3)^T,\beta=(1,1,1)^T$, $A^{10}=$ C ;

(A) $6^{10}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ (B) 6^9 (C) $6^9\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ (D) 6^{10}

16. 设A,B,C是同阶方阵，E,O是与A同阶的单位阵和零矩阵，则下列命题中,正确的是 D ;

(A) $|A|=0\Rightarrow A=O;$ (B) $A^2=O\Rightarrow A=O;$

(C) $AB=AC\Rightarrow B=C;$ (D) $(A+E)(A-E)=A^2-E$;

17.若A,B同阶方阵,且$|AB|=0$,则有 C ;

(A) $A=O$ 或 $B=O$ (B) $A=O$ 且 $B=O$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$ (D) $|A|=0$ 且 $|B|=0$

18.若A,B可逆方阵,则$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=$ A ;

(A) $\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}B^{-1}&O\\O&A^{-1}\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$

19. 向量$\alpha_1=(1,u,-2)^T,\alpha_2=(2,4,-4)^T,\alpha_3=(3,6,v)^T$，若向量组$\alpha_1$ α_2线性相关，则$u=$(B);

(A) 1 (B) 2 (C) -4 (D) -6

20. 向量$\alpha_1=(1,u,-2)^T,\alpha_2=(2,4,-4)^T,\alpha_3=(3,6,v)^T$，若向量组$\alpha_2$ α_3线性无关，则$v\neq$(D);

(A) 1 (B) 2 (C) -4 (D) -6

21. 向量组$\alpha_1=(1,1,-2)^T,\alpha_2=(2,4,-4)^T,\alpha_3=(3,6,-6)^T$的秩为： C ;

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

22.设ξ_1,ξ_2是线性方程组$AX=b$的两个解，则$\xi_1-\xi_2$是线性方程组（ A ）的解;

(A) $Ax=0$　(B) $Ax=b$　(C) $Ax=2b$　(D) $Ax=3b$

23. .设ξ_1,ξ_2是线性方程组$AX=b$的两个解,则$2\xi_1-\xi_2$是线性方程组（ B ）的解.

(A) $Ax=0$　(B) $Ax=b$　(C) $Ax=2b$　(D) $Ax=3b$

24. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组$AX=0$的基础解系的向量个数为 B ;

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

25.在第 24 小题中, 齐次线性方程组$AX=0$的通解为 B ;

(A) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$　(B) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(C) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$　(D) $x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

26.在第 24 小题中,若矩阵 A 作为某个非齐次线性方程的增广矩阵, 则该方程的通解为: C ;

(A) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$　(B) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

(C) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$　(D) $x=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

27. 给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1 \\ (1+\lambda)x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_3 = 3 \end{cases},$$

则：当$\lambda\neq 0$,且$\lambda\neq -1$时，方程组 C ;

(A) 有无穷多个解　(B) 无解　(C) 有唯一解　(D) 有两个解

28.在第 27 小题中,当 λ =0 时方程组 $\underline{\qquad B \qquad}$;

(A) 有无穷多个解 (B) 无解 (C) 有唯一解 (D) 有两个解

29. 在第 27 小题中,当 λ =-1 时,方程组$\underline{\qquad B \qquad}$;

(A) 有无穷多个解 (B) 无解 (C) 有唯一解 (D) 有两个解

30．两个向量$\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T,\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)^T$的内积为$(\alpha_1,\alpha_2)=$$\underline{\quad A \quad}$;

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

31. 在第 30 小题中, α_1,α_2的夹角$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=$$\underline{\qquad C \qquad}$;

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

32. 向量组$\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T,\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)^T$用施密特正交化方法得: $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=$$\underline{\quad D \quad}$.

(A) $(\frac{1}{2},\ 1,-\frac{1}{2})^T$ (B) $(\frac{1}{2},\ 2,-\frac{1}{2})^T$ (C) $(-\frac{1}{2},\ 2,\frac{1}{2})^T$ (D) $(-\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2})^T$

33．若 3 阶方阵 A 与矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$相似，则$A$的三个特征根分别是$\underline{\quad A \quad}$;

(A) $2,1,3$ (B) $-2,-1,-3$ (C) $\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{3}$

34.在第 33 小题中，方阵A的行列式$|A|=$$\underline{\qquad B \qquad}$;

(A) -6 (B) 6 (C) $\frac{1}{6}$ (D) $-\frac{1}{6}$

35．在第 33 小题中，A^{-1}的三个特征根分别是$\underline{\qquad C \qquad}$;

(A) $2,1,3$ (B) $-2,-1,-3$ (C) $\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{3}$

36．在第 33 小题中，方阵A^2+E的行列式$|A^2+E|=$$\underline{\qquad C \qquad}$.

(A) 15 (B) 37 (C) 100 (D) 200

37．若矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{6}}{6}\\\alpha&\beta&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$是正交矩阵，则$\alpha,\beta$分别为$\underline{\qquad D \qquad}$;

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}$

38．二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$ 是______B______；

(A) 正定的　　(B) 半正定的　　(C) 负定的　　(D) 不定的

39．若存在可逆矩阵 C，使 $B=C^TAC$，则 A 与 B______C______；

(A) 相等　　(B) 相似　　(C) 合同　　（D) 可交换

40.当 t 满足条件___B___时，二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2$ 是正定的.

(A) $|t|>1$　　(B) $|t|<1$　　(C) $|t|\geq 1$　　(D) $|t|\leq 1$

二、计算题（共 6 分）

得分	

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\0\\9\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

求向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的一组极大线性无关组,并把其余向量用此组向量表示出来.

解　$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\1&2&9&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$　2’

由此可知, α_1，α_2,α_4 为一组极大线性无关向量组,　2’

$\alpha_3=5\alpha_1+2\alpha_2$　2’

三、计算题（共 7 分）

得分	

求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=1\\ x_3-2x_4=2\\ x_1-x_2-x_4=3\end{cases}$ 的通解.

解　增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&1\\0&0&1&-2&2\\1&-1&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$　4’

还原成线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 \ + x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 2 \end{cases}$ 1'

可得方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2$为任意常数. 2'

注：答案不唯一.

四、计算题（共 7 分）

得分	

已知二次型$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$，

1）写出二次型所对应的矩阵A;

2）求正交变换$x = Qy$,化f为标准形;

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 1'

特征方程$|A - \lambda E| = 0$，得特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 3$ 2'

解方程$(A - \lambda_1 E)x = 0$,得相应的特征向量$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,. $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ 1'

解方程$(A - \lambda_3 E)x = 0$,得相应的特征向量$X = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \neq 0$. 1'

令$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $x = Qy$, 2'

$f = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$.， 1' **注：答案不唯一.**

东莞理工学院（本科）试卷（B 卷）答案及评分标准

2011 --2012 学年第 一 学期

《 线性代数 》试卷

开课单位：计算机学院数学教研室，考试形式：闭卷，允许带___入场

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、选择填空题（共 80 分,每小题 2 分）

得分	

1.行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=$ ___B___；

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 在第 1 小题中,D 的第 2 行第 3 列元素 3 的代数余子式 $A_{23}=$ ___B___;

(A) -3　　(B) 3　　(C) -9　　(D) 9

3.在第 1 小题中,表达式：$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$ ___C___;

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4.在第 1 小题中,表达式：$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=$ ___A___;

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 在第 1 小题中,表达式：$A_{11}-A_{12}-A_{13}=$ ___A___;

(A) 10　　(B) 20　　(C) 30　　(D) 40

6.设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=$ ___B___ ;

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$|-2A|=$ ___D___ ;

(A) 2　　(B) -2　　(C) 8　　(D) -8

8. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{pmatrix}$,则$A\cdot B=$__B_____;

(A) $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$

9. 设$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{pmatrix}$,则$BB^T=$___B_____;

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

10.设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$____C______;

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

11. 若$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的秩$R(A)=$___C______;

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

12.$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&0&0\\2&0&2&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}$，则$\det(B)=$___D___;

(A) -4 (B) -8 (C) -12 (D) -16

13.在第 12 小题中,秩$R(B)=$___D____;

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

14. 设A,B,C是同阶方阵，E,O分别是与A同阶的单位阵和零矩阵,则下列命题中,正确的是

A__________;

(A) $(A+E)(A-E)=A^2-E$ (B) $A^2=O\Rightarrow A=O$;

(C) $AB=AC\Rightarrow B=C$; (D) $|A|=0\Rightarrow A=0$; ;

15. 向量$\alpha=(1,2,1)^T,\beta=(1,1,1)^T$, 则矩阵$A=\alpha\cdot\beta^T=$___A___;

(A) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ (C) 4 (D) -4

16. 向量$\alpha=(1,2,1)^T,\beta=(1,1,1)^T$, $A^{10}=$___C___;

(A) $4^{10}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ (B) 4^9 (C) $4^9\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ (D) 4^{10}

17.若A,B同阶方阵,且$|AB|=0$,则有___C___;

(A) $A=O$ 或 $B=O$ (B) $A=O$ 且 $B=O$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$ (D) $|A|=0$ 且 $|B|=0$

18.若A,B可逆方阵,则$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=$___D___;

(A) $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}B^{-1}&O\\O&A^{-1}\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$

19. 向量$\alpha_1=(1,2,-2)^T,\alpha_2=(2,u,-4)^T,\alpha_3=(3,6,v)^T$，若向量组$\alpha_1\ \alpha_2$线性相关，则$u=($ C $)$;

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

20. 向量$\alpha_1=(1,2,-2)^T,\alpha_2=(2,u,-4)^T,\alpha_3=(3,6,v)^T$，若向量组$\alpha_1,\alpha_3$线性无关，则$v\neq($ B $)$;

(A) -2 (B) -6 (C) -8 (D) -12

21. 向量组$\alpha_1=(1,2,-2)^T,\alpha_2=(2,4,-4)^T,\alpha_3=(3,6,-6)^T$的秩为：___B___;

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

22.设ξ_1,ξ_2是线性方程组$AX=b$的两个解，则$2\xi_1+\xi_2$是线性方程组（ D ）的解;

(A) $Ax=0$ (B) $Ax=b$ (C) $Ax=2b$ (D) $Ax=3b$

23. .设ξ_1,ξ_2是线性方程组$AX=b$的两个解,则$2\xi_1-\xi_2$是线性方程组（ B ）的解.

(A) $Ax=0$ (B) $Ax=b$ (C) $Ax=2b$ (D) $Ax=3b$

24．　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系的向量个数为

B　　;

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

25.在第 24 小题中, 齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为　　B　　;

(A) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$　　(B) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(C) $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$　　(D) $x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

26.在第 24 小题中,若矩阵 A 作为某个非齐次线性方程的增广矩阵, 则该方程的通解为:

C　　;

(A) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$　　(B) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

(C) $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　　(D) $x=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

27．给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=1\\ (1+\lambda)x_2+x_3=1\\ \lambda x_3=0 \end{cases},$$

则：当 $\lambda\neq 0$,且 $\lambda\neq -1$ 时，方程组　　C　　;

(A) 有无穷多个解　(B)　无解　　(C)　有唯一解　　(D)　有两个解.

28.在第 27 小题中,当 λ=0 时方程组　　A　　;

(A) 有无穷多个解　(B)　无解　　(C)　有唯一解　　(D)　有两个解

29. 在第 27 小题中,当 λ= -1 时,方程组　　B　　;

(A) 有无穷多个解　(B)　无解　　(C)　有唯一解　　(D)　有两个解

30．两个向量$\alpha_1=(-1,\ 0,\ -1)^T,\alpha_2=(0,\ -1,\ -1)^T$的内积为$(\alpha_1,\alpha_2)=$ <u>B</u> ;

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

31. 在第 30 小题中, α_1,α_2的夹角$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=$ <u>C</u> ;

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

32. 向量组$\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T,\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)^T$用施密特正交化方法得: $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=$ <u>D</u> .

(A) $(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})^T$　　(B) $(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$　　(C) $(-\frac{1}{2},2,\frac{1}{2})^T$　　(D) $(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

33．若 3 阶方阵 A 与矩阵$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$相似，则$A$的三个特征根分别是 <u>A ;</u>

(A) $1,1,3$　　(B) $-1,-1,-3$　　(C) $1,1,\frac{1}{3}$　　(D) $-1,-1,-\frac{1}{3}$

34.在第 33 小题中，方阵A的行列式$|A|=$ <u>B ;</u>

(A) -3　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $-\frac{1}{3}$

35．在第 33 小题中，A^{-1}的三个特征根分别是 <u>C</u> ;

(A) $1,1,3$　　(B) $-1,-1,-3$　　(C) $1,1,\frac{1}{3}$　　(D) $-1,-1,-\frac{1}{3}$

36．在第 33 小题中，方阵A^2+E的行列式$|A^2+E|=$ <u>D</u> .

(A) 10　　(B) 20　　(C) 30　　(D) 40

37．若矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{6}}{6}\\ \alpha&\beta&\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$是正交矩阵，则$\alpha,\beta$分别为 <u>D</u> ;

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}$

38．二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2$是 <u>D ;</u>

(A) 正定的　　(B) 半正定的　　(C) 负定的　　(D) 不定的

39．若存在可逆矩阵 C，使$B=C^{-1}AC$，则 A 与 B <u>B ;</u>

(A) 相等　　(B) 相似　　(C) 合同　　（D) 可交换

40.当t满足条件___B___时，二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2$是正定的.

(A) $|t|>1$　　(B) $|t|<1$　　(C) $|t|\ge 1$　　(D) $|t|\le 1$

二、计算题（共 6 分）

得分	

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}4\\2\\0\\8\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

求向量组α_1，α_2，α_3，α_4的一组极大线性无关组,并把其余向量用此组向量表示出来.

解　$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&4&2\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\1&2&8&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 2’

由此可知, α_1，α_2,α_4为一组极大线性无关向量组, 2’

$\alpha_3=4\alpha_1+2\alpha_2$ 2’

三、计算题（共 7 分）

得分	

求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=1\\ x_3-2x_4=2\\ 2x_1-2x_2-x_4=4\end{cases}$的通解.

解　增广矩阵$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&1\\0&0&1&-2&2\\2&-2&-1&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 4’

还原成线性方程组$\begin{cases}x_1=x_2+x_4+3\\ x_3=2x_4+2\end{cases}$ 1’

可得方程组通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}$, c_1,c_2为任意常数. 2’

注：答案不唯一.

四、计算题（共 7 分）

得分	

已知二次型 $f(x)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3$，

2）写出二次型所对应的矩阵 A；

2）求正交变换 $x=Qy$，化 f 为标准形；

解 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 1'

特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$ 2'

解方程 $(A-\lambda_1E)x=0$，得相应的特征向量 $X=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,. $c_1^2+c_2^2\neq 0$ 1'

解方程 $(A-\lambda_3E)x=0$，得相应的特征向量 $X=c_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $c_3\neq 0$. 1'

单位化得: $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,, $e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $x=Qy$, 2'

$f=y_1^2+y_2^2+3y_3^2$., 1'

注：答案不唯一.

东莞理工学院（本科）试卷（ A 卷）

2008 --2009 学年第 一 学期

《 线性代数 》试卷

开课单位：计算机学院数学教研室，考试形式：闭卷，允许带___入场

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人						

一、填空题（共 72 分每空 3 分）

得分	

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$，则 $|-A|=$______ ， $A^{-1}=$________________，

$|A^2|=$______ .

2． $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\1&2\end{pmatrix}=$_______________，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=$ ______________.

3．行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&3&6\end{vmatrix}=$_______，行列式 $\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&2&2\end{vmatrix}=$____________.

4． 两个向量 $\alpha_1'=(1,\ 1,\ 0),\alpha_2'=(1,\ 2,\ 1)$ 的内积为：_____， 夹角为：________；

把 α_1，α_2 用施密特正交化方法得: $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=$______

5．若向量 $\beta'=(4,7),\alpha_1'=(1,2),\alpha_2'=(2,3)$，则 β 用 α_1,α_2 组合的表达式是_______.

6．向量组 $\alpha_1'=(2,\ 0,\ 0),\alpha_2'=(1,-1,\ 1),\alpha_3'=(0,\ 1,\ 0),\alpha'_4=(3,1,3)$ 的线性相关性为：_____线性_____________，它的秩是_________.

7．已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(2,5,2)$, $\alpha_3=(1,5,k)$ 线性相关,则 $k=$______________.

8．若 3 阶方阵 A 的三个特征根分别是 1，2，3，则方阵 A 的行列式 $|A|=$_________.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为____________________，线性方程组

$AX=O$ 的基础解系的向量个数为____________.

10．给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^2 \end{cases},$$

则：当___________时，方程组有唯一解；当 $\lambda=$______时方程组有无穷解；当 $\lambda=$ 时方程组无解.

11．矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为：__________、1，对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为：_____________.

12．设方阵 A 满足 $A'A=E$，则 $|A|=$_____________.

13．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵为：________________，该二次型为________定二次型.

二、计算题（共 6 分）

得分	

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使 $AX=A+2E$

三、计算题（共 6 分）

得分	

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

求向量组α_1，α_2，α_3，α_4的一组极大线性无关组,并把其余向量用此组向量表示出来.

四、计算题（共 6 分）

得分	

求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=-2\\2x_1-2x_2+x_3-x_4=2\end{cases}$的通解.

五、限选题（共 10 分）

得分	

（经管类学生可选做第 1、2 小题中的一题，理工类学生仅限做第 2 小题）

(1) **(理工类学生不做此小题)**已知二次型$f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$，

a）此二次型所对应的矩阵A；

b）用配方法将二次型化为标准型；

c）写出相应的可逆线性变换矩阵。

(2)（**理工类学生必做此小题**） 已知二次型 $f(x)=ax_1^2+x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$ 的秩为 2

a）写出二次型所对应的矩阵 A，并求参数 a；

b）计算二次型所对应的矩阵 A 的特征值；

c）写出经正交变换后，二次型化成的标准形。

答 案

一、填空题（共 72 分每空 3 分）

得分	

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$，则 $\left|-A\right|=$ <u>-6</u>， $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1/2&0\\-1/6&-1/6&1/31\end{pmatrix}}$，

$\left|A^2\right|=$ <u>36</u> .

2．$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\1&2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2&3\\2&0\\1&2\end{pmatrix}}$，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}5&8\\5&12\end{pmatrix}}$.

3．行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&3&6\end{vmatrix}=$ <u>18</u>，行列式 $\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&2&2\end{vmatrix}=$ <u>12</u>.

4． 两个向量 $\alpha_1'=(1,\ 1,\ 0),\alpha_2'=(1,\ 2,\ 1)$ 的内积为：<u>3</u>， 夹角为：$\underline{\pi/6}$;

把 α_1，α_2 用施密特正交化方法得: $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=$ <u>$(-1/2,1/2,0)'$</u>

5．若向量 $\beta'=(4,7),\alpha_1'=(1,2),\alpha_2'=(2,3)$，则 β 用 α_1,α_2 组合的表达式是 $\underline{\beta=2\alpha_1+\alpha_2}$.

6．向量组 $\alpha_1'=(2,\ 0,\ 0),\alpha_2'=(1,-1,\ 1),\alpha_3'=(0,\ 1,\ 0),\alpha'_4=(3,1,3)$ 的线性相关性为：<u>线性相关</u>，它的秩是 <u>3</u>.

7．已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(2,5,2)$, $\alpha_3=(1,5,k)$ 线性相关,则 $k=$ <u>2</u>.

8．若 3 阶方阵 A 的三个根分别是 1，2，3，则 方阵 A 的行列式 $\underline{|A|=6}$

9． 设矩阵 A=$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为 <u>2</u> ，线性方程组 $AX=O$ 的基础解系的向量个数为 <u>3</u>.

10．给定线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(\lambda+1)\ x_3=\lambda^2\end{cases},$$

则：当 <u>$\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq0$</u> 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=$ <u>1</u> 时方程组有无穷解；

当 $\lambda =$ <u>0</u> 时方程组无解.

11．矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为： <u>2</u> 、1，对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为：

$\underline{k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},k\neq 0}$.

12． 设 A 设方阵 A 满足 $A'A=E$,则 $|A|=$ <u>± 1</u> .

13． 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵的系数矩阵为：

$\underline{A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}}$，该二次型为 <u>正</u> 定二次型.

二、计算题（共 6　分）

得分	

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 求矩阵 X, 使 $AX=A+2E$

解　由 $AX=A+2E$　得 $X=A^{-1}(A+2E)$　　2’

$\begin{pmatrix}A & A+2E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$　　3’

即 $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

三、计算题（共 6 分）

得分	

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

求向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的一组极大线性无关组,并把其余向量用此组向量表示出来.

解　$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\1&2&4&2\\1&1&3&2\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

由此可知, α_1，α_2,α_4为一组极大线性无关向量组,

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$

四、计算题（共 6 分）

得分	

求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=-2\\2x_1-2x_2+x_3-x_4=2\end{cases}$的通解.

解　增广矩阵$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&-2\\2&-2&1&-1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&2\end{pmatrix}$　　2’

还原成线性方程组$\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=x_4+2\end{cases}$　　1’

可得方程组通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix},c_1,c_2$为任意常数.　　2’

五、限选题（共 10 分）

得分	

（经管类学生可选做第 1、2 小题中的一题，理工类学生仅限做第 2 小题）

(1)　**(理工类学生不做此小题)**已知二次型$f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$，

d）出二次型所对应的矩阵A

e）用配方法将二次型化为标准型，

C)写出相应的可逆线性变换矩阵。

解　a）$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$　　2’

b) $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3=(x_1-x_3)^2+x_2^2$　　2’

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$

即有变换$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ ， $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 2’

把二次型$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$化为标准型$f(x) = y_1^2 + y_2^2$ 2’

C) 对应变换矩阵$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2’

(2) 已知二次型$f(x) = ax_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$的秩为 2,

a) 写出二次型所对应的矩阵A，并求参数a

b) 求出二次型所对应的矩阵A的特征值

c) 求正交变换$X = PY$，把二次型化成标准形（不写正交变换）.

（理工类学生必做此小题）

解 a）$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2’

$\because R(A) = 2, \therefore |A| = 0 \Rightarrow a = 1$ 1’

b)解特征方程$|A - \lambda E| = 0$，得$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 3$ 3’

C）分别解方程组（$A - \lambda_i$）$X = O, i = 1,2,3$， 得单位特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

及正交矩阵$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， 正交变换$X = PY$ 3’

把二次型变为标准型: $f = 2y_2^2 + 3y_3^2$ 1’

东莞理工学院（本科）试卷（ B 卷）

2008 --2009 学年第 一 学期

《 线性代数 》试卷

开课单位：计算机学院数学教研室，考试形式：闭卷，允许带___入场

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人						

一、填空题（共 66 分每空 3 分）

得分	

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则行列式： $|-A|=$ _______ ，$|AB|=$_______，

$|A^{-1}|=$___________，$|A^*|=$________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，则 $8A+B=$________，$A\cdot B=$__________，

3．设 A 是三阶方阵，$|A|=8$，则：

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$_________，$2a_{31}A_{11}+2a_{32}A_{12}+2a_{33}A_{13}=$_________其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

4． $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，它的第 3 行第 2 列元素 0 的代数余子式 $A_{32}=$______，$A^{-1}=$______

A 的伴随矩阵 $A^*=$ ____________________.

5. 向量 $\alpha'=(1,1,0)$ 与向量 $\beta'=(0,-1,1)$，则： 向量 α 的长度 $\|\alpha\|=$____，α 与 β 的夹角 $=$ ___________ ，

6．向量$\alpha_1'=(1,2,1)$ $\alpha_2'=(3,4,3)$，$\alpha_3'=(1,1,1)$，则向量组α_1，α_2，α_3的秩等于_____ ，该组向量线性_________ 关.

7. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&\lambda&2\\2&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则

当$\lambda\neq$_________ 时，线性方程组$AX=B$有唯一解；

当$\lambda=1$ 时，线性方程组$AX=B$的解$X'=$ _______________ 。

8．设$A\vec{x}=\vec{0}$，A是4×5阶矩阵， $R(A)=2$，则基础解系中含有________个解向量.

9．设λ_1,λ_2是实对称矩阵A的两个不同的特征值，$\vec{p}_1,\vec{p}_2$是对应的特征向量，则$[\vec{p}_1,\vec{p}_2]=$_____.

10 设 2 阶 实 对 称 矩 阵 A 的 两 个 特 征 值 分 别 为 $-2,-3$ ， 则 矩 阵 A 为 __________定 矩 阵，$|A|=$____________ ；多项式$f(x)=x^2-x-1$，则$|f(A)|=$ _____________.

二、选择题（共 14 分每空 2 分）

得分	

1．设n元线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$，且$R(A)=R(A,\vec{b})=n$，则该方程组（ ）

A．无解 B．有唯一解 C．有无穷多解 D．不确定

2． 设n元线性方程组$A\vec{x}=\vec{O}$，且$R(A)=n-1$，则该方程组的解由（ ）个向量构成.

A．有无穷多个 B．1 C． $n-k$ D．不确定

3．设A,B为n阶方阵，满足等式$AB=O$，则必有（ ）.

A． $A=O$或$B=O$ B． $|A|=0$或$|B|=0$ C． $A+B=O$ D． $|A|+|B|=0$

4．设$A\neq O,B\neq O$为n阶方阵，满足等式$AB=O$，则必有（ ）.

A． $R(A)=0$ B． $R(B)=0$ C． $R(A)+R(B)=n$ D． $R(A)+R(B)\leq n$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（ ）

A．可能不正交 B. 有非单位向量 C. 组成单位正交向量组 C. 必含零向量

6．n阶方阵A的行列式$|A|=0$,则A的列向量（ ）

A．线性相关 B．线性无关 C． $R(A)=0$ D． $R(A)\neq0$

7． n阶方阵A的行列式$|A|\neq0$是矩阵A可逆的（ ）

A．充分条件 B．必要条件 C．充要条件 D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量 $\alpha_1' = (1,2,2)$，$\alpha_2' = (-2,-1,2)$，$\alpha_3' = (-2,2,-1)$，$\beta_1' = (0,1,0)$，$\beta_2' = (0,1,1)$ 请把向量组 β_1，β_2 表示成向量组 α_1，α_2，α_3 的线性组合.

四、计算题（共 6 分）

得分	

非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = \lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 当 λ 取何值时（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷解，并求出相应的通解.

五、计算题（共 8 分）

得分	

试求一个正交的相似变换矩阵，把矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵

答　案

一、填空题（共 66 分每空 3 分）

得分	

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则行列式：$|-A|=$ __-6____，$|AB|=$ __-12____，

$|A^{-1}|=$ __1/6____，$|A^*|=$ __36____.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，则 $8A+B=\underline{\begin{pmatrix}17&2&3\\4&21&6\\7&8&25\end{pmatrix}}$，$A\cdot B=\underline{\begin{pmatrix}2&4&6\\8&10&12\\14&16&18\end{pmatrix}}$，

3．设 A 是三阶方阵，$|A|=8$，则：

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$ __8____，$2a_{31}A_{11}+2a_{32}A_{12}+2a_{33}A_{13}=$ __0____其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

4．$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，它的第 3 行第 2 列元素 0 的代数余子式 $A_{32}=$ __-2____

$A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1/2&-1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}}$

A 的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{pmatrix}6&-6&0\\0&3&-2\\0&0&2\end{pmatrix}}$.

5. 向量 $\alpha'=(1,1,0)$ 与向量 $\beta'=(0,-1,1)$，则：向量 α 的长度 $\|\alpha\|=\underline{\sqrt{2}}$，$\alpha$ 与 β 的夹角

$=\dfrac{3}{4}\pi$ ，

6．向量 $\alpha_1'=(1,2,1)$ $\alpha_2'=(3,4,3)$，$\alpha_3'=(1,1,1)$，则向量组 α_1，α_2，α_3 的秩等于__2____，该组向量线性__相____关.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&\lambda&2\\2&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则

当 $\lambda\neq$ __2____ 时，线性方程组 $AX=B$ 有唯一解；

当$\lambda = 1$ 时，线性方程组$AX = B$的解$X' = k\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, k$为任意常数.

8．设$A\vec{x} = \vec{0}$，A是4×5阶矩阵，　$R(A) = 2$，则基础解系中含有__3__个解向量.

9．设λ_1, λ_2是对称阵A的两个不同的特征值，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$是对应的特征向量，则$[\vec{p}_1, \vec{p}_2] =$__0__.

10 设 2 阶实对称矩阵A的两个特征值分别为$-2, -3$，则矩阵A为__负定__定矩阵，　$|A| =$__6__；多项式$f(x) = x^2 - x - 1$，则$|f(A)| =$__55__.

二、选择题（共 14 分每空 2 分）

得分	

1．设n元线性方程组$A\vec{x} = \vec{b}$，且$R(A) = R(A, \vec{b}) = n$，则该方程组（　B　）

A．无解　B．有唯一解　C．有无穷多解　D．不确定

2.　设n元线性方程组$A\vec{x} = \vec{O}$，且$R(A) = n - 1$，则该方程组的解由（　A　）个向量构成.

A．有无穷多个　B．1　C．$n - k$　D．不确定

3．设A, B为n阶方阵，满足等式$AB = O$，则必有（　B　）.

A．$A = O$或$B = O$　B．$|A| = 0$或$|B| = 0$　C．$A + B = O$　D．$|A| + |B| = 0$

4．设$A \neq O, B \neq O$为n阶方阵，满足等式$AB = O$，则必有（ D ）.

A．$R(A) = 0$　B．$R(B) = 0$　C．$R(A) + R(B) = n$　D．$R(A) + R(B) \leq n$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（　C　）

A．可能不正交　B. 有非单位向量　C. 组成单位正交向量组　C. 必含零向量

6. n阶方阵A的行列式$|A| = 0$,则A的列向量（　A　）

A．线性相关　B．线性无关　C．$R(A) = 0$　D．$R(A) \neq 0$

7. n阶方阵A的行列式$|A| \neq 0$是矩阵A可逆的（　C　）

A．充分条件　B．必要条件　C．充要条件　D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量$\alpha_1' =(1, 2, 2)$ $\alpha_2' =(-2, -1, 2)$，$\alpha_3' =(-2, 2, -1)$，$\beta_1' =(0,3,0)$，$\beta_2' = (0.3,3)$ 请把向量组β_1，β_2表示成向量组α_1，α_2，α_3的线性组合.

解　$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　4'

由此可知

$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$

$\beta_2 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$　2'

四、计算题（共 6 分）

得分	

非齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$当$\lambda$取何值时（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷解，并相应的通解.

解　方程组的系数矩阵$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$的行列式$|A| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$　2'

（1）　当$\lambda \neq -1$且$\lambda \neq 2$时，方程有唯一解；　1'

（2）　当$\lambda = 2$时，方程组无解；　1'

（3）　当$\lambda = -1$时，增广矩阵$B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可得方程组有无穷多解

通解为$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　2'

五、计算题（共 8 分）

得分	

试求一个正交的相似变换矩阵, 把矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$化为对角矩阵

解　解特征方程$|A - \lambda E| = 0$，得特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 3$　3'

解方程$(A - \lambda_1)X = O$,得相应的特征向量$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,.　$C_1^2 + c_2^2 \neq 0$　1'

解方程$(A-\lambda_3)X=O$,得相应的特征向量$X=C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, C\neq 0$. 1’

令$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 1’

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，正交相似变换$P'AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 2’

东莞理工学院（本科）试卷（ C 卷）

2008 --2009 学年第 一 学期

《 线性代数 》试卷

开课单位：计算机学院数学教研室，考试形式：闭卷，允许带___入场

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人						

一、填空题（共 60 分每空 3 分）

得分	

1．行列式：$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$________，它的第 2 行第 3 列元素 2 的代数余子式 $A_{23}=$_______.

2．若 A，B 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=2$，则 $|-2A|=$ _______ ，$|(A\cdot B)'|=$______，

$|A^{-1}|=$__________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A\cdot B=$________________,

$A^{-1}=$______________.

4．设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶方阵，$|A|=3$，则：

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$_________，　$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=$__________ .

5. 向量 $\alpha'=(1,0,1)$ 与向量 $\beta'=(1,-1,0)$，则：α 与 β 的夹角= ________ ，

6．向量 $\alpha_1'=(1,2,3)$ $\alpha_2'=(3,2,1)$，$\alpha_3'=(1,1,1)$，则向量组 α_1，α_2，α_3 的秩等于_____ ，该组向量线性________ 关.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,则

当 $\lambda \neq$________ 时，线性方程组 $AX=B$ 有唯一解；

当 $\lambda=2$ 时，线性方程组 $AX=B$ 的解 $X'=$ ______________ .

8．设 $A\vec{x}=\vec{0}$，A 是 3×4 阶矩阵，基础解系中含有 1 个解向量，则 $R(A)=$_______.

9．设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A 的两个不同的特征值，$\vec{p}_1,\vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $[\vec{p}_1,\vec{p}_2]=$____.

10．设 3 阶实对称矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,3$，则矩阵 A 为_______定矩阵，A 的行列式 $|A|=$____.

11．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$ 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，该矩阵

的最大特征值是________，该特征值对应的特征向量是_________.

二、选择题（共 20 分每空 2 分）

得分	

1．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，且 $R(A,\vec{b})=n+1$，则该方程组（　　）

A．有唯一解 B．有无穷多解　　C．无解　　D．不确定

2．　设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{O}$，且 $R(A)=k$，则该方程组的基础解系由（　　　　）

个向量构成.

A．有无穷多个　　B．有唯一个　　C．$n-k$　　D．不确定

3．设矩阵 A,B,C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列错误的论述是（　　　　）.

A．矩阵 C 的行向量由矩阵 A 的行向量线性表示　；

B．矩阵 C 的列向量由矩阵 A 的列向量线性表示；

C．　$|A\cdot B|=|C|$　；

D．矩阵 C 的行向量由矩阵 B 的行向量线性表示.

4．设矩阵 A,B,C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列关于矩阵秩的论述正确的是（　　）.

A．$R(A)>R(C)$　B．$R(B)>R(C)$　C．$R(A)+R(B)=n$　D．$R(A)\le R(C)$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（　　　　）

A．可能不正交　　B. 有非单位向量　　C. 组成单位正交向量组　　C. 必含零向量

6. n 阶方阵 A，B 的乘积的行列式 $|AB|=5$,则 A 的列向量（　　）

A．方阵 A 的列向量线性相关　　　B．方阵 A 的列向量线性无关

C．$R(A)=5$　　　　　　　　D．$R(A)<n$

7．n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$ 是齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解的（　　　　）(注:此空得分值为 2 分)

A．充分条件　B．必要条件　C．充要条件　D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量 $\alpha_1' = (1,2,2)$ $\alpha_2' = (-2,-1,2)$， $\alpha_3' = (-2,2,-1)$， $\beta_1' = (0,1,0)$ ， $\beta_2' = (0,1,1)$ 请把向量组 β_1，β_2 表示成向量组 α_1，α_2，α_3 的线性组合.

四、计算题（共 6 分）

得分	

非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = \lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 当 λ 取何值时（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷解，并求出相应的通解.

五、计算题（共 8 分）

得分	

试求一个正交的相似变换矩阵，把矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵

答　案

一、填空题（共 60 分每空 3 分）

得分	

1．行列式：$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$____28____，它的第 2 行第 3 列元素 1 的代数余子式 $A_{23} =$___-2____.

2．若 A，B 为 3 阶方阵，且 $|A| = 2$，$|B| = 2$，则 $|-2A| =$ __-16_____ ，$|(A \cdot B)'| =$___4___，

$|A^{-1}| =$___1/2_____.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4．设 A 是 3 阶方阵, $|A| = 3$，则：

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$___3____，　$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$___0____ .

5. 向量 $\alpha' = (1,0,1)$ 与向量 $\beta' = (1,-1,0)$，则: α与β的夹角= $\frac{\pi}{3}$ ，

6．向量 $\alpha_1' = (1,2,3)$ $\alpha_2' = (3,2,1)$，$\alpha_3' = (1,1,1)$，则向量组 α_1，α_2，α_3 的秩等于__2___ ，该组向量线性__相___ 关.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,则

当 $\lambda \neq$___0____ 时，线性方程组 $AX = B$ 有唯一解；

当 $\lambda = 2$ 时，线性方程组 $AX = B$ 的解 $X' =$ __（1，-1，0）____ 。

8．设 $A\vec{x} = \vec{0}$，A 是 3×4 阶矩阵，基础解系中含有 1 个解向量，则 $R(A) =$__3____.

9．设 λ_1, λ_2 是对称阵 A 的两个不同的特征值，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $[\vec{p}_1, \vec{p}_2] =$__0___.

10．设 3 阶实对称矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,3$，则矩阵 A 为___正___定矩阵，A 的行列式 $|A| =$6___.

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$ 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，该矩阵的最大特征值是 <u>2</u>，该特征值对应的特征向量是 $c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},c\neq 0$.

二、选择题（共 20 分每空 2 分）

得分	

1．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，且 $R(A,\vec{b})=n+1$，则该方程组（　B）

A．有唯一解 B．有无穷多解　　C．无解　　D．不确定

2．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{O}$，且 $R(A)=k$，则该方程组的基础解系由（　C　　）个向量构成.

A．有无穷多个　　B．有唯一个　　C．$n-k$　　D．不确定

3．设矩阵 A,B，C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列错误的论述是（　B　　）.

A．矩阵 C 的行向量由矩阵 A 的行向量线性表示　；

B．矩阵 C 的列向量由矩阵 A 的列向量线性表示；

C．　$|A\cdot B|=|C|$　；

D．矩阵 C 的行向量由矩阵 B 的行向量线性表示.

4．设矩阵 A,B，C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列关于矩阵秩的论述正确的是（　D）.

A．$R(A)>R(C)$　　B．$R(B)>R(C)$　　C．$R(A)+R(B)=n$　　D．$R(A)\le R(C)$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（ C　　）

A．可能不正交　　B. 有非单位向量　　C. 组成单位正交向量组　　C. 必含零向量

6. n 阶方阵 A，B 的乘积的行列式 $|AB|=5$,则 A 的列向量（　B）

A．方阵 A 的列向量线性相关　　B．方阵 A 的列向量线性无关

C．$R(A)=5$　　D．$R(A)<n$

7．n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$ 是齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解的（　C　　）(注:此空得分值为 2 分)

A．充分条件　B．必要条件　C．充要条件　D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量 $\alpha_1'=(1,2,2)$ $\alpha_2'=(-2,-1,2)$，$\alpha_3'=(-2,2,-1)$，请把向量 $\beta'=(1,0,0)$ 表示成向量组

α_1，α_2，α_3 的线性组合.

解 解方程

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta,$

即 $AX=\beta$ 1'

$$知X=A^{-1}\beta=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

3'

即 $\frac{1}{9}\alpha_1-\frac{2}{9}\alpha_2-\frac{2}{9}\alpha_3=\beta$ 1'

四、计算题（共 6 分）

得分	

求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3+x_4=-2\\2x_1-4x_2+x_3-x_4=2\end{cases}$ 的通解.

解 增广矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 1 & -1 & 2\\ & & & & \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 2'

还原成线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=x_4+2\end{cases}$ 1'

可得方程组通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 为任意常数. 2'.

五、计算题（共 8 分）

得分	

用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形，并求可逆的线性变换.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2-6x_3^2$ 2'

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2\\y_2=x_2-2x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2-2y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

即有可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 2'

把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化为标准形

$f(x_1, x_2, x_3) = {y_1}^2 + y_2^2 - 6y_3^2$ 1'

东莞理工学院（本科）试卷（A 卷）答案

2006 -2007 学年第一学期

开课单位：<u>数学教研室</u>，考试形式：闭卷，允许带____________入场

科目：<u>线性代数</u> 班级：__________ 姓名：__________ 学号：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

一．**填空题**（每小题 3 分，共 45 分）

1．设 $A^3 = E$，则 $A^{-1} = \underline{A^2}$.

2．已知三阶方阵 A 的行列式 $|A| = 2$，则 $\left|(2A)^{-1} - A^*\right| = \underline{-27/16}$.

3．若 $A^2 = A$，则矩阵 A 的特征值是 <u>0， 1</u> .

4．当 $t = \underline{1}$ 时，矩阵 $A = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} t & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵.

5．$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 $X = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

6．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{9}$.

7．线性方程组 $A_{m\times n} X = \vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $\underline{R(A) = R(\overline{A}) = n}$.

8．设 A 是正交矩阵,则 $A^{-1} = \underline{A'}$，$|A| = \underline{\pm 1}$.

9．设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|$ $\underline{\neq 0}$ $\Leftrightarrow$ A 的秩为 $\underline{n}$.

10．若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，－1，2，则 $|A| = \underline{-2}$.

11．设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 必线性 <u>相关</u> .

12. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&12\end{bmatrix}$相似，则$x=$__4__.

13. 若二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3$为正定的，则$k$的取值范围是 $\underline{|K|<2}$.

二．(10 分) $\vec{\alpha}_1'=(1,\ 2,\ 3,\ 0),\vec{\alpha}_2'=(5,2,-1,\ 8),\vec{\alpha}_1'=(0,1,\ 2,\ -1),\ \vec{\alpha}_4'=(-1,\ 1,\ 3,\ -3)$,试判定该向量组的相关性，求向量组的秩，及其一个极大无关组。

解 $A=\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\right)=\begin{bmatrix}1&5&0&-1\\2&2&1&1\\3&-1&2&3\\0&8&-1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&5&0&-1\\0&-8&1&3\\0&-16&2&6\\0&8&-1&-3\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&5&0&-1\\0&-8&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

秩$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=2$，向量组线性相关，任何两个向量构成极大无关组。

三.（12 分）求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 的通解.

解 $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \to \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2\text{是任意常数})$$

四．（15 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量。

解　$\left|A-\lambda E\right|=(4-\lambda)^2(2+\lambda)^2$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4.$ 当 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 时，解 $(A+2E)\vec{x}=0$ 得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全体特征向量为 $k_1\vec{\xi}_1$，（k_1 为任意常数）。当 $\lambda_3=4$ 时，解 $(A-4E)\vec{x}=0$ 得 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda_3=1$ 的全体特征向量为 $k_2\vec{\xi}_2$，（k_2 为任意常数）。

五．（12 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$，用配方法将其化为标准形，写出变换矩阵.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3 \\ x_2=\qquad y_2-2y_3 \\ x_3=\qquad\qquad y_3 \end{cases}$，所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

变换矩阵 $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$|C|=1\neq 0$. 标准形 $f=y_1^2+y_2^2$.

六．（6 分）设 A、B 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，且 $A+B=AB$，证明：$A-E$ 可逆.

证 $A+B=AB\Rightarrow A=(A-E)B\Rightarrow A-E+E=(A-E)B\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$，

$|A-E|\cdot|B-E|=1$，所以 $|A-E|\neq 0$，故 $A-E$ 可逆.

东莞理工学院（本科）试卷（B 卷）答案

2006 -2007 学年第一学期

开课单位：<u>数学教研室</u>，考试形式：闭卷，允许带____________入场

科目：<u>线性代数</u> 班级：____________ 姓名：__________ 学号：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

二．**填空题**（每小题 3 分，共 45 分）

14. 已知四阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $|A^*|=$ <u>8</u>.

15. 若 $A^2=A$，则矩阵 A 的特征值是 <u>0，1</u>.

16. 当 $t=$ <u>1</u> 时，矩阵 $A=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} t & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}$.

18. 若 n 阶方阵 A 的秩 $r<n$，则 $|A|=$ <u>0</u>.

19. 线性方程组 $A_{m\times n}X=\vec{b}$ 有无穷多解的充要条件是 $\underline{R(A)=R(\overline{A})<n}$.

20. 设 A 是正交矩阵,则 $A^{-1}=\underline{A'}$，$|A|=\underline{\pm 1}$.

21. 向量组 $\alpha_1'=(1,\ 0,\ 1),\alpha_2'=(3,\ 1,\ 1),\alpha_3'=(2,\ 1,\ 0)$, 的一个极大无关组是 $\underline{\alpha_1,\alpha_2}$ 或 $\underline{\alpha_1,\alpha_3}$ 或 $\underline{\alpha_2,\alpha_3}$

22. 四个三维向量一定线性 <u>相关</u>.

23. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，－1，2，则 $|A|=$ <u>-2</u>.

24. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$ <u>4</u>.

25. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & k & 0\\ 0 & 0 & k-2\end{bmatrix}$正定,则$k$的取值范围为：$\underline{k>2}$.

26. 设向量$\vec{\alpha}_1'=(1,0,1),\quad \vec{\alpha}_2'=(0,1,1)$，则$[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2]=$__1__.

三. (8 分) 计算行列式$\begin{vmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & c\\ d & e & f & g\end{vmatrix}$

解 原式$=-d\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=-abcd$

四.　(10 分)设 $\vec{\alpha}_1' = (1,\ 2,\ -1,\ 3), \vec{\alpha}_2' = (0,\ 1,\ 2,\ -1), \vec{\alpha}_3' = (3,\ 7,\ -1,\ 8)$,

$\vec{\alpha}_4' = (-1,\ 0,\ 5,\ -5)$，求该向量组的秩及一个极大无关组.

解　$$A = \left(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 8 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_1 + r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$，极大无关组 α_1, α_2（或任意两个向量），秩为 2 .

四．（12 分）求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$的基础解系与通解．

解 $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & -3 & \\ 1 & -1 & -2 & 3 & \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & -4 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_2]{\frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$

通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （c_1, c_2 是任意常数）

基础解系 $\vec{\xi}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， $\vec{\xi}_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

五. （12 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解 $|A-\lambda E|=(2-\lambda)^2(1-\lambda)$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $(A-2E)\vec{x}=0$ 得 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全体特征向量为 $\eta=k_1\vec{\xi}_2+k_2\vec{\xi}_2$，（$k_1,k_2$ 为任意常数）。

当 $\lambda_3=1$ 时，解 $(A-E)x=0$ 得 $\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda_3=1$ 的全体特征向量为 $k_3\vec{\xi}_3$，（k_3 为任意常数）.

六．（8 分）用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$ 为标准形，并求出所用变换矩阵．

.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+x_2^2=(x_1-x_3)^2+{x_2}^2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1+y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

变换矩阵 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$|C|=1\neq 0.$ 标准形 $f=y_1^2+y_2^2$ ．

七．（5 分）设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，证明：AB 与 BA 相似.

证 因为 $|A|\neq 0$， 所以 A 可逆，从而有

$$A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=E(BA)=BA\text{，}$$

故 $AB\sim BA$。

东莞理工学院（本科）试卷

2006 -2007 学年第二学期

开课单位：<u>数学教研室</u>，考试形式：闭卷，允许带____________入场

科目：<u>线性代数</u> 班级：____________ 姓名：__________ 学号：__________

题序	一	二	总 分
得分			
评卷人			

五． **填空题**（每空 3 分，共 60 分）

27. 已知有三阶方阵 A 与 B，$|A|=2$，$|B|=3$，则 $|2A|=$__________；$|AB|=$______________；矩阵 A 的秩 $R(A)=$____________________；$R(AB)=$________________________。

28. 若 $A^2=A$，则矩阵 A 的特征值是_______________；若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|A|=$______________________.

29. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$_______________；$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$_____________.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$_______________；

30. 若 n 阶方阵 A 的秩 $r<n$，则 $|A|=$____________；此时 A 可逆吗？答：__________。

31. 设 A 是正交矩阵,则 $A^{-1}=$____________；$|A|=$________________. 设 B 是对称矩阵，则 $B=$____________。

32. 四个三维向量一定线性__________________.

33. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$____________.

34. 设向量 $\vec{\alpha}_1'=(1,0,1)$, $\vec{\alpha}_2'=(0,1,1)$，则这两个向量的内积 $[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2]=$____________.

35. 计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$=________；$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$=__________。

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$________。

二、**计算与应用题（共 40 分）**

1. （14 分）解线性方程组：

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$；　　（2）$X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2．（16 分）求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量.

3．（10 分）用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$ 为标准形.

答案

一、填空题（每空 3 分，共 60 分）

36.　已知有三阶方阵 A 与 B，$|A|=2$，$|B|=3$，则 $|2A|=\underline{\quad 16 \quad}$；$|AB|=\underline{\quad 6 \quad}$；矩阵 A 的秩 $R(A)=\underline{\quad 3 \quad}$；$R(AB)=\underline{\quad 3 \quad}$。

37.　若 $A^2=A$，则矩阵 A 的特征值是$\underline{\quad 0、1 \quad}$；若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|A|=\underline{\quad 6 \quad}$.

38.　$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}}$；　$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}}$.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}}$；

39.　若 n 阶方阵 A 的秩 $r<n$，则 $|A|=\underline{\quad 0 \quad}$；此时 A 可逆吗？答：$\underline{\quad \text{不可逆} \quad}$。

40.　设 A 是正交矩阵,则 $A^{-1}=\underline{\quad A' \quad}$；$|A|=\underline{\quad 1\text{或}-1 \quad}$．设 B 是对称矩阵，则 $B=\underline{\quad B' \quad}$。

41.　四个三维向量一定线性$\underline{\quad \text{相关} \quad}$.

42.　已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{bmatrix}$与矩阵 $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}$相似，则 $x=\underline{\quad 4 \quad}$.

43.　设向量 $\vec{\alpha}_1'=(1,0,1)$，$\vec{\alpha}_2'=(0,1,1)$，则这两个向量的内积 $[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2]=\underline{\quad 1 \quad}$.

44.　计算行列式 $\begin{vmatrix}0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\underline{\quad 0 \quad}$；$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\underline{\quad 6 \quad}$。

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\underline{\quad 9 \quad}$。

二、计算与应用题（共 40 分）

1. （14 分）解线性方程组：

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$；　　（2）$X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

解：（1）$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$……………3 分

$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$………………6 分

$= \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$……………7 分

（2）$X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$……………3 分

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$………………6 分

$= \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$……………7 分

2.（16 分）求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解　$|A - \lambda E| = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$，……………………5 分

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$.……………8 分

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时，解 $(A-2E)\vec{x} = 0$　得 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的全体特征向量为 $\eta = k_1 \vec{\xi}_2 + k_2 \vec{\xi}_2$，　$(k_1, k_2$ 为任意常数)。………………..12 分

当$\lambda_3=1$时，解$(A-E)x=0$ 得$\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$A$的对应于$\lambda_3=1$的全体特征向量为$k_3\vec{\xi}_3$， ($k_3$为任意常数)．…………..16 分

3．（10 分）用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$为标准形.

解　$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+x_2^2=(x_1-x_3)^2+x_2{}^2$，……….4 分

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，…………….8 分

标准形$f=y_1^2+y_2^2$ ．…………10 分